

МРЕЖНО ПЛАНИРАЊЕ

Појам и методе мрежног планирања

Крајем педесетих година двадесетог века развио се низ нових метода планирања које се заснивају на примени алгебре, теорије графова и математичке статистике. Ове методе једним именом називају се ТЕХНИКА МРЕЖНОГ ПЛАНИРАЊА. Предност ових метода у односу на дотадашње је у томе што омогућавају раздвајање **анализе структуре** и **анализе времена**.

Анализа структуре значи успостављање логичног редоследа и међусобних зависности појединих активности при реализацији одређеног пројекта, или било које пословне активности.

Анализа времена подразумева одређивање временских параметара на бази којих се може контролисати временска реализација пројекта и управљати и руководити пројектом у циљу одржавања уговорених рокова. Анализа времена подразумева и одређивање времена трајања свих активности које су предвиђене пројектом.

Техника мрежног планирања базира се на две основне методе из којих се развило више десетина модификованих метода и техника. Основне методе мрежног планирања су:

- **CPM** (Critical Path Method) или Метод критичног пута и
- **PERT** (Program Evaluation and Review Technique) или Метод оцене и ревизије пројекта.

CPM метода први пут је примењена 1957. године. Основне поставке ове методе поставили су Kelley и Walker. Метода критичног пута може се користити онда када су позната (нормирана) времена трајања појединих активности у пројекту. За разлику од CPM, код PERT методе време трајања појединих активности није а priori познато. Непознавање времена трајања активности у неком пројекту произлази из немогућности нормирања времена (на пример, код истраживачких пројеката) тако да PERT метода омогућава планирање са одређеним елементима случајности. Развој PERT методе започео је 1958. године.

Технике мрежног планирања значајно су побољшале процес реализације пројеката и повећале ефикасност њиховим управљањем. Оне се базирају на мрежним моделима (мрежним дијаграмима). Мрежни модели користе се за анализу структуре и одражавају редослед извршења појединих активности. Мрежни дијаграм не само да представља погодан средство за прегледно представљање плана, већ и сам представља математички модел, који се може анализирати и на којем се може експериментисати. Техника мрежног планирања омогућава адаптивно управљање процесом реализације пројекта. Она такође омогућава да се пре отпочињања реализације пројекта уоче проблеми и сагледају критични радови (активности) који могу утицати на крајњи рок извршења целог пројекта (задатка). Мрежно планирање обезбеђује прецизне процене трошкова и на тај начин омогућава концентрисање пажње на критичне активности од којих, у основи, зависи скраћење, или

продужење рокова реализације, а тиме и смањење или повећање трошкова реализације пројекта (задатка).

Елементи мрежног дијаграма

Основу технике мрежног планирања чини графички модел који се назива *мрежни дијаграм*. С математичког аспекта мрежни дијаграм је коначни граф оријентисан стрелицама. Граф се дефинише као скуп тачака $1, 2, \dots, i, j, \dots, n$ и дужи (i, j) које повезују неке парове тачака. Дуж " i, j " има почетак у тачки " i " и завршетак у тачки " j ".

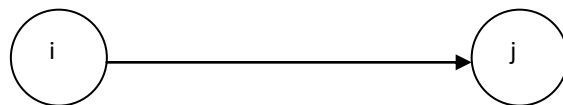
Мрежни дијаграм је графички модел којим се представља одређени пројекат. Под појмом пројекта у овом смислу подразумева се целина техничких, организационих и економских мера које треба спровести у циљу реализације неке инвестиције, производног задатка, или неке друге пословне активности.

Активност је елемент мрежног дијаграма који може представљати:

1. **Одређену етапу радног процеса** у оквиру реализације пројекта која захтева утрошак времена и средстава;
2. **Чекање** у процесу реализације пројекта, при чему се захтева само утрошак времена;
3. **Зависност** између појединих радних процеса, која сама по себи не захтева ни утрошак времена, ни утрошак средстава (тзв. "фиктивна активност").

Активност се на мрежном дијаграму приказује оријентисаним дужима $(i-j)$. Фиктивне активности, које дефинишу постојање зависности између реалних активности, приказују се испрекиданим линијама (дужима) на мрежном дијаграму.

Догађај је други елемент мрежног дијаграма, који означава тренутак почетка или завршетка једне или више активности, или целог пројекта. На мрежном дијаграму догађаји се приказују тачкама (кружићима):



Почетни догађај

Активност (i,j)

Завршни догађај

Процес конструкције мрежног дијаграма

Мрежни дијаграм, као графички модел одређеног пројекта, саставља се на основу логичког редоследа и међусобних зависности појединих активности које треба извршити у оквиру реализације пројекта. Поступак израде мрежног дијаграма спроводи се у следећим корацима:

1. Дефинисање пројекта (израда објекта, реализација потребних производних активности у неком оперативном периоду, спровођење неке пословне акције и сл.).
2. Дефинисање свих радних процеса и услова потребних за укупну реализацију пројекта.
3. Растављање сложених радних процеса на саставне елементе, просте или хомогене активности.
4. Дефинисање неопходних чекања и зависности између појединих хомогених активности.
5. Састављање листе хомогених активности на основу временског редоследа.
6. Повезивање хомогених активности на основу логичког и временског редоследа и конструкција мрежног дијаграма.

При самој изради мрежног дијаграма (мреже) неопходно је придржавати се одређених геометријских и технолошких правила.

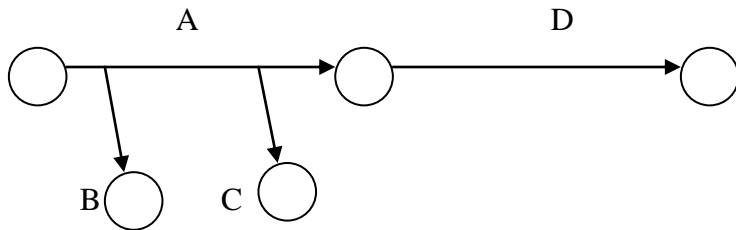
Геометријска правила мрежног дијаграма су:

1. Мрежа представља међусобно повезани систем. Свака активност и сваки догађај на мрежном дијаграму морају бити повезани са осталим догађајима и активностима у оквиру пројекта.
2. Мрежа има коначну димензију. Мрежни дијаграм је састављен од коначног броја међусобно повезаних догађаја и активности. Мрежа има свој почетни и завршни догађај, који представљају почетак и завршетак пројекта, односно почетак првих активности и завршетак последњих активности у реализацији пројекта.
3. Мрежа је динамична и усмерена. Свака активност је усмерена правцем оријентисане дужи и увек се каснија активност надовезује на претходну.
4. Мрежа мора бити без петље. Активности које полазе из неког догађаја не могу поново да стигну у полазни догађај.
5. Оријентисане дужи које представљају активности на мрежном дијаграму могу да се секу.
6. Сам облик мреже и дужина појединих дужи на мрежном дијаграму нису битни, нити су пропорционални трајању појединих активности. Важно је само поштовање редоследа активности.

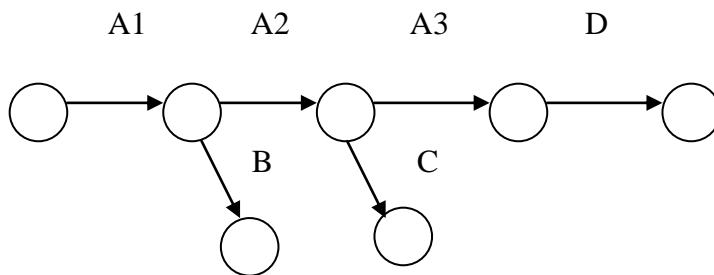
Технолошка правила мрежног планирања су:

1. Смер стрелица којима су означене дужи које представљају активности оријентисан је с лева на десно.
2. Свака активност мора почети и завршити се догађајем.
3. Поједине активности могу почети у току трајања друге активности.

На пример, у току трајања хомогене активности "А" треба да започну активности "В" и "С".



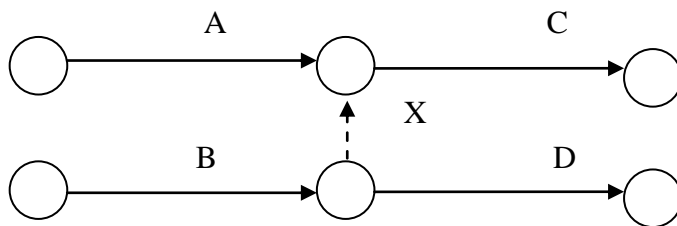
То се на мрежном дијаграму представља тако што се хомогена активност "А" подели на више активности:



при чему је $A = A1 + A2 + A3$.

4. Ако је почетак једне или више активности условљен завршетком неких претходних активности, при чему се њихов завршетак не може свести на један догађај, неопходно је увести фиктивне активности:

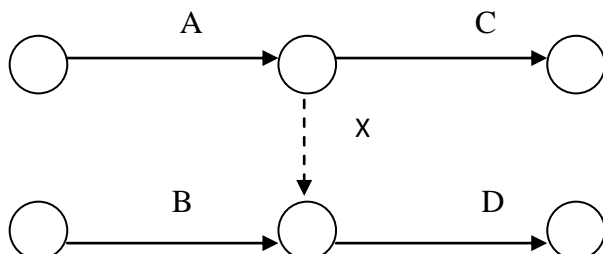
ПРИМЕР 1: Активност "С" може започети тек пошто су завршене активности "А" и "В".



У овом случају "X" је фиктивна активност која показује да активност "С" не може започети пре него што је окончана активност "В".

ПРИМЕР 2: Активност "D" не може започети пре него што су завршене активности "A" и "B".

У овом случају фиктивна активност "X" показује зависност почетка активности "D" од завршетка активности "A".

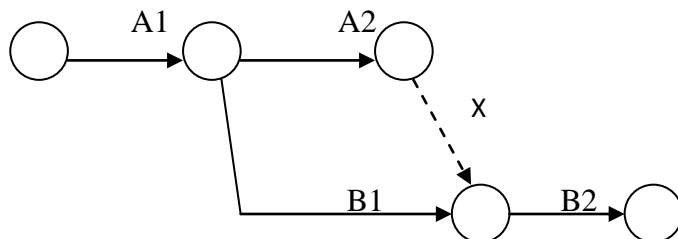


ПРИМЕР 3: Активност "B" може да почне након одређеног трајања активности "A", али се само део активности "B" може одвијати паралелно са делом активности "A", док је други део активности "B" условљен завршетком активности "A".

Обе активности у овом случају се деле на сегменте:

$$A = A1 + A2$$

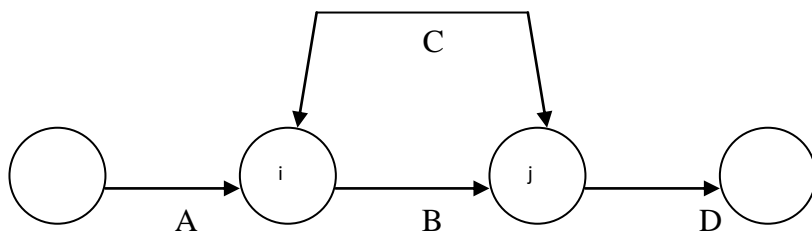
$$B = B1 + B2$$



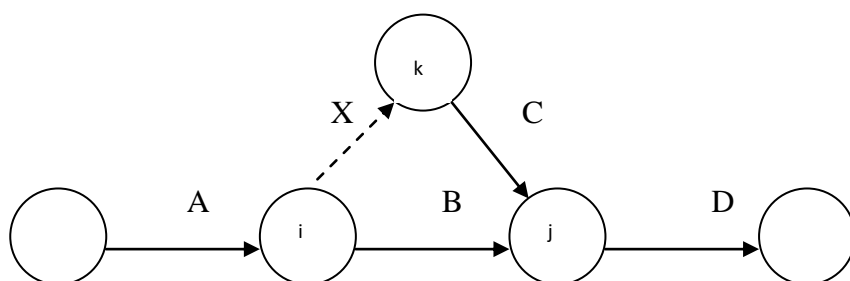
Фиктивна активност "X" показује зависност почетка активности "B2" од завршетка активности "A2".

- Ако две или више активности почињу и завршавају се у истом догађају, онда је њихова идентификација неодређена. У том случају потребно је увођење фиктивне активности, како би се могле тачно дефинисати све активности.

ПРИМЕР 4: Из догађаја "i" полазе активности "B" и "C" и завршавају се у догађају "j".



Активност "B" и "C" су неодређене јер имају исти почетни и завршни догађај ($A = i-j$ и $C = i-j$). Зато се уводи фиктивна активност "X", па је сада: $B = i-j$; $C = k-j$



Метод критичног пута (CPM)

Мрежни дијаграм је графички модел плана реализације пројекта. Он на јединствени начин показује међусобну повезаност и зависност свих активности и догађаја одређеног пројекта. Низ међусобно повезаних активности, код којих је завршни догађај претходне активности истовремено почетак наредне активности, а протеже се од почетног до завршног догађаја пројекта, назива се путем.

Критични пут је низ међусобно повезаних активности које се протежу између почетног и завршног догађаја пројекта и имају сумарно најдуже време трајања. Он је најзначајнији пут у неком пројекту, јер од његове реализације зависи и реализација пројекта у целини.

Критични пут се изражава одређеним временским јединицама. Дужина критичног пута, односно његово трајање истовремено дефинише најкраће могуће трајање реализације пројекта.

Критични пут одређује се помоћу триангуларне (троугласте) матрице. Састављање мрежног дијаграма и израчунавање критичног пута биће илустровано на следећем примеру:

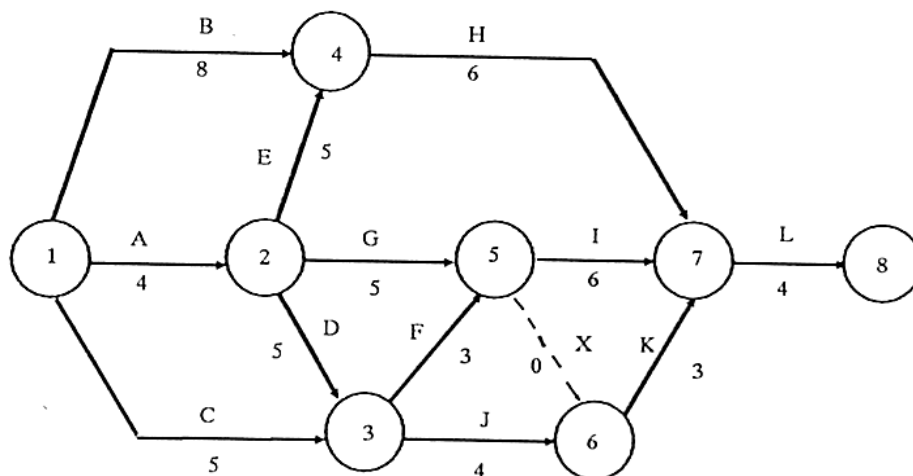
За једну фарму крава треба изградити објекат за машинску мжу са приручном млекарском за пријем,хлађење и чување млека до испоруке, са пратећим санитарним чвором.

На основу анализе и процене потребних радова на реализацији пројекта састављена је листа активности:

Листа активности на реализацији пројекта

Ознака активности	Назив активности	Трајање активности (недеља)
A	Уређење градилишта	4
B	Набавка и пријем робе	8
C	Израда носећих бетонских стубова	5
D	Израда постоља за стубове	5
E	Зидање постоља за стубове	5
F	Монтирање монтажних елемената музилишта	3
G	Зидање преградних зидова музилишта	5
H	Размештај и уградња опреме	6
i	Покривање крова и унутрашњи радови	6
J	Зидање ограде	4
K	Изградња пратећих објеката	3
L	Завршни радови	4

На основу анализе технолошког и логичког редоследа радова конструисан је мрежни дијаграм реализације пројекта:



На основу мрежног дијаграма на којем су уцртане и фиктивне активности, код којих је временско трајање 0 саставља се коначна листа активности на пројекту према редоследу извођења.

Листа активности према редоследу извођења

Ознака активности		НАЗИВ АКТИВНОСТИ	ТРАЈАЊЕ АКТИВНОСТИ (t_{ij})
Почетни догађај "i"	Завршни догађај "j"		
1	2	A	4
1	3	C	5
1	4	B	8
2	3	D	5
2	4	E	5
2	5	G	5
3	5	F	3
3	6	J	4
4	7	H	6
5	6	X	0
5	7	I	6
6	7	K	3
7	8	L	4

По састављању коначне листе свих активности према редоследу извођења саставља се триангуларна матрица, чијим се решавањем одређују елементи анализе времена, и то:

- најранији почеци активности, које почињу из појединих догађаја ($t_i^{(0)}$),
- најкаснији завршеци активности, које се завршавају у појединим догађајима ($t_j^{(1)}$) и
- критични догађаји.

У прву колону триангуларне матрице уносе се почетни догађаји, а у први ред матрице завршни догађаји, према хронолошком редоследу.

У поједина поља матрице уносе се подаци о трајању активности која је дефинисана почетним и завршним догађајем.

У последњу колону матрице уписују се најранији почеци свих активности које полазе из појединих догађаја, а израчунавају се на следећи начин:

Најранији почетак активност из трећег догађаја израчунава се:

$$5 + 0 = 5 \text{ (за поље матрице 1-3) и}$$

$$5 + 4 = 9 \text{ (за поље матрице 2-3).}$$

У овом случају, када у некој колони има више попуњених поља, за свако поље сабира се трајање те активности са најранијим почетком из реда којем поље припада. Већа вредност (у овом случају 9) представља најранији почетак за активности из трећег догађаја, и она се уписује на крај трећег реда.

На исти начин израчунавају се вредности најранијих почетака активности и у осталим редовима.

У последњем реду матрице уписују се најкаснији завршеци свих активности које се завршавају у појединим догађајима. Код израчунавања вредности најкаснијих завршетака полази се од последњег догађаја.

У последње поље последњег реда преписује се вредност последњег поља последње колоне(најранији почетак активности које би почињале у последњем догађају). Пошто из завршног догађаја не полази ни једна активност, он уједно представља и најкаснији завршетак свих активности које се завршавају у овом догађају.

Најкаснији завршетак активности које се завршавају у седмом догађају израчунава се тако што се посматра седми ред. Код попуњених поља у седмом реду, од најкаснијег завршетка у последњем реду колоне у којој се налази пуно поље одузима се вредност у том пољу (трајање активности). У овом случају то је: $22 - 4 = 18$. Ова вредност уписује се у последње поље седме колоне.

Овакав поступак наставља се до првог догађаја у којем најкаснији завршетак мора бити једнак нули.

Уколико има више попуњених поља у неком реду, израчунава се разлика за сва поља и уписује се најмања вредност добијене разлике. На пример, у петом реду су два попуњена поља:

$$5 - 6 = 0, \text{ односно } 5 - 7 = 6.$$

У овом случају најкаснији завршетак активности које се завршавају у петом догађају је 12, јер:

$$15 - 0 = 15, \text{ и } 18 - 6 = 12.$$

На овај начин попуњена триангуларна матрица је:

	1	2	3	4	5	6	7	8	$t_i^{(0)}$
1		4	5	8					0
2			5	5	5				4
3					3	4			9
4							6		9
5						0	6		12
6							3		13
7								4	18
8									22
$t_j^{(1)}$	0	4	9	12	12	15	18	22	
$t_i^{(0)}$	0	4	9	9	12	13	18	22	
$t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$	0	0	0	3	0	2	0	0	

Након што су израчунати најранији почеци и најкаснији завршеци, подаци о најранијим почецима се преписују испод најкаснијих завршетака и тражи се њихова разлика. Догађаји код којих је ова разлика једнака нули су догађаји који се налазе на критичном путу и називају се критични догађаји. У овом примеру критични догађаји су 1, 2, 3, 5, 7 и 8.

У следећем кораку подаци о најранијим почецима и најкаснијим завршецима појединих активности преписују се у листу активности. Критичне активности израчунавају се на основу **укупне временске резерве** која се израчунава као разлика између најкаснијег завршетка, најранијег почетка и трајања активности, односно:

$$R_{ij}^u = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Активности код којих је укупна временска резерва једнака нули су критичне активности, односно то су активности које се налазе на критичном путу, или критичним путевима, јер може бити више од једног пута са максималним трајањем.

Из табеле се може видети да су критичне активности (активности код којих је укупна временска резерва нула): 1-2, 2-3, 3-5, 5-7 и 7-8.

Спајањем ових критичних активности добија се критични пут. Дужина критичног пута у овом примеру је:

$$4 + 5 + 3 + 6 + 4 = 22 \text{ недеље.}$$

То значи да наведени пројекат може бити завршен за 22 недеље. При томе, завршетак пројекта о року у првом реду зависи од благовремене реализације критичних активности.

Активности које се не налазе на критичном путу могу се у одређеној мери пролонгирати, а да то не утиче на укупно време трајања пројекта. Другим речима, активности које се не налазе на критичном путу имају одређене временске резерве.

Ознака i-j	t_{ij}	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	R_{ij}^u
1 2	4	0	4	0
1 3	5	0	9	4
1 4	8	0	12	4
2 3	5	4	9	0
2 4	5	4	12	3
2 5	5	4	12	3
3 5	3	9	12	0
3 6	4	9	15	2
4 7	6	9	18	3
5 6	0	12	15	3
5 7	6	12	18	0
6 7	3	13	18	2
7 8	4	18	22	0

6.11.5. Временске резерве

За анализу времена, односно за израчунавање временских резерви појединих активности које се не налазе на критичном путу, битно је познавати поред **најранијег почетка** ($t_i^{(0)}$) и **најкаснијег завршетка** ($t_j^{(1)}$) који се добијају решавањем триангуларне матрице и **најкаснији почетак** ($t_i^{(1)}$) и **најранији завршетак** ($t_j^{(0)}$) појединих активности.

Најкаснији почетак означава време када најкасније може да започне нека активност, а да не буде угрожено време најкаснијег почетка наредне активности, односно трајање пројекта у целини. Најкаснији почетак се израчунава као разлика између најкаснијег завршетка и трајања активности i-j:

$$t_i^{(1)} = t_j^{(1)} - t_{ij}$$

Најранији завршетак неке активности показује време када нека активност може најраније да буде завршена. Израчунава се као збир најранијег почетка и трајања активности i-j:

$$t_j^{(0)} = t_i^{(0)} + t_{ij}$$

Свака активност (i-j) чије је време трајања краће од њеног максимално дозвољеног времена трајања (разлика између најкаснијег завршетка и најранијег почетка, односно: $t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$) има одређену временску резерву.

Временска резерва служи за анализу времена и директно показује за колико времена се може одложити почетак или завршетак појединих активности, а да се не угрози време завршетка пројекта у целини. У зависности од тога у каквом је односу посматрана активност према активностима које јој непосредно претходе, односно које непосредно следе може се идентификовати три врсте временских резерви:

1. **Укупна временска резерва** (R_{ij}^u)
2. **Слободна временска резерва** (R_{ij}^s)
3. **Независна временска резерва** (R_{ij}^n).

Укупна временска резерва је разлика између максимално расположивог времена за извршење неке активности и времена трајања те активности. Она показује за колико је краће време трајања активности које нису на критичном путу, а спајају два критична догађаја.

Слободна временска резерва постоји само када се у завршни догађај стичу две или више активности. Она показује за колико времена је могуће померити рок најранијег почетка активности које нису на критичном путу, а да се тиме не угрозе најранији почeci наредних активности. Слободна временска резерва се израчунава тако што се од највеће вредности најранијег завршетка ($t_j^{(0)}$) свих активности које се завршавају у догађају "j" одузму њихови најранији почeci ($t_i^{(0)}$) и њихово трајање (t_{ij}).

$$R_{ij}^s = t_{j(max)}^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Независна временска резерва показује за колико времена се може продужити трајање активности, рачунајући од њеног најкаснијег почетка, а да се не угрози време најранијег завршетка те активности. Код израчунавања независне временске резерве (R_{ij}^n) узимају се у обзир све активности које полазе из почетног догађаја "i" и све активности које се стичу у завршни догађај "j". Од највеће вредности најранијег завршетка ($t_j^{(0)}$) одузимају се најмања вредност најкаснијег почетка ($t_i^{(1)}$) свих активности које почињу у догађају "i" и трајање посматране активности (t_{ij}).

$$R_{ij}^n = t_{j(max)}^{(0)} - t_{i(min)}^{(1)} - t_{ij}$$

Поред наведених временских резерви које се односе на активности, постоји и условна временска резерва која се односи на догађаје и од значаја је код повезивања више мрежних дијаграма.

Израчунавање укупне, слободне и независне временске резерве дато је у следећој табели:

Ознака		t _{ij}	Почетак		Завршетак		Временске резерве		
i	j		t _i ⁽⁰⁾	t _i ⁽¹⁾	t _j ⁽⁰⁾	t _j ⁽¹⁾	R _{ij} ^u	R _{ij} ^s	R _{ij} ⁿ
1	2	4	0	0	4	4	0К	0	0
1	3	5	0	4 (0)	5 (9)	9	4	4	4
1	4	8	0	4 (0)	8 (9)	12	4	1	1
2	3	5	4	4	9	9	0К	0	0
2	4	5	4	7 (4)	9	12	3	0	0
2	5	5	4	7 (4)	9 (12)	12	3	3	3
3	5	3	9	9	12	12	0К	0	0
3	6	4	9	11 (9)	13	15	2	0	0
4	7	6	9	12	15 (18)	18	3	3	0
5	6	0	12	15 (12)	12 (13)	15	3	1	1
5	7	6	12	12	18	18	0К	0	0
6	7	3	13	15	16 (18)	18	2	2	0
7	8	4	18	18	22	22	0К	0	0

Значај мрежног дијаграма у пракси

Одређивање критичног пута омогућава да се при реализацији пројекта приоритетно води рачуна о релативно малом броју активности које се налазе на критичном путу, јер од њихове благовремене реализације зависи благовремена реализација пројекта у целини.

Ово је нарочито значајно код великих пројеката, где има више стотина или хиљада активности. Критични пут значајно олакшава праћење реализације пројекта.

С друге стране, временске резерве указују на то колико "вакуума", односно временског простора постоји за кашњење реализације појединих активности које се не налазе на критичном путу.

Критични пут је значајан и у случајевима када се жели скратити укупно време реализације пројекта. Скраћење времена пројекта може се постићи једино скраћивањем трајања појединих активности на критичном путу. При томе, укупно скраћење пројекта не мора бити једнако скраћењу времена неке критичне активности, јер ово скраћење може изазвати промену критичног пута.

Скраћивање времена трајања активности које нису на критичном путу нема утицаја на скраћење укупног времена трајања пројекта, већ се тиме само повећавају њихове укупне временске резерве.

Последица скраћења времена трајања критичних активности на време извођења пројекта биће илустрована на истом примеру. Са скраћењем трајања критичних активности 2-3 са 5 на 3 недеље и 5-7 са 6 на четири недеље, односно критичног пута за укупно 4 недеље, за очекивати је да ће се укупно време реализације пројекта скратити са 22 на 18 недеља.

Уношењем измена трајања наведених активности у триангуларну матрицу добија се следеће:

	1	2	3	4	5	6	7	8	$t_i^{(0)}$
1		4	5	8					0
2			3	5	5				4
3					3	4			7
4							6		9
5						0	4		10
6							3		11
7								4	15
8									19
$t_j^{(1)}$	0	4	8	9	11	12	15	19	
$t_i^{(0)}$	0	4	7	9	10	11	15	19	
$t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$	0	0	1	0	1	1	0	0	

Време трајања пројекта смањено је на 19 недеља. Променили су се критични догађаји у односу на првобитни случај, и сада су то догађаји 1, 2, 4, 7 и 8.

Очигледно, смањење трајања пројекта на 18 недеља је изостало због тога што је промењен критични пут, који је сада 1-2, 2-4, 4-7, 7-8 што се види из наредне табеле:

Ознака		t_{ij}	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	R_{ij}^u
i	i				
1	2	4	0	4	0К
1	3	5	0	8	3
1	4	8	0	9	1
2	3	3	4	8	1
2	4	5	4	9	0К
2	5	5	4	11	2
3	5	3	7	11	1
3	6	4	7	12	1
4	7	6	9	15	0К
5	6	0	10	12	2
5	7	4	10	15	1
6	7	3	11	15	2
7	8	4	15	19	0К

Ако би се у наредном кораку скратило трајање критичне активности 2-4 са 5 на 4 недеље добило би се жељено трајање пројекта од 18 недеља.

У овом случају сви догађаји би били критични, а критичне активности биле би:

1-2, 1-4, 2-3, 2-4, 3-5, 3-6, 4-7, 5-7, 6-7 и 7-8,

што значи да постоји више критичних путева и то:

I 1-2, 2-3, 3-5, 5-7, 7-8

II 1-2, 2-3, 3-6, 6-7, 7-8

III 1-2, 2-4, 4-7, 7-8

IV 1-4, 4-7, 7-8.

Трајање сваког од критичних путева је исто и износи 18 недеља.

Скраћивањем трајања критичних активности повећава се број критичних путева, и смањује трајање свих временских резерви. На тај начин праћење и управљање реализацијом пројекта постају знатно сложенији и тежи.