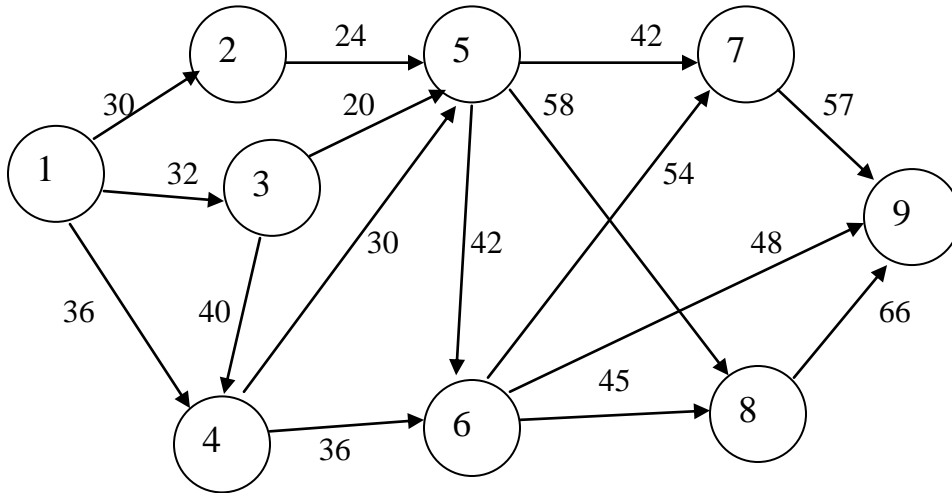


Пример 1:

Утврдити критичне путеве у приказаном мрежном дијаграму помоћу триангуларне матрице. Израчунати слободну и независну временску резерву.



Из приказаног мрежног дијаграма унешене су активности као и дужина њиховог трајања t_{ij} .

Ознака		t_{ij}
i	j	
1	2	30
1	3	32
1	4	36
2	5	24
3	4	40
3	5	20
4	5	30
4	6	36
5	6	42
5	7	42
5	8	58
6	7	54
6	8	45
6	9	48
7	9	57
8	9	66

По састављању коначне листе свих активности према редоследу извођења саставља се триангуларна матрица, чијим се решавањем одређују елементи анализе времена, и то:

- најранији почеци активности, које почињу из појединих догађаја ($t_i^{(0)}$),
- најкаснији завршеци активности, које се завршавају у појединим догађајима ($t_j^{(1)}$) и
- критични догађаји.

У прву колону триангуларне матрице уносе се почетни догађаји, а у први ред матрице завршни догађаји, према хронолошком редоследу.

У поједина поља матрице уносе се подаци о трајању активности која је дефинисана почетним и завршним догађајем.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$t_i^{(0)}$
1		30	32	36						
2					24					
3				40	20					
4					30	36				
5						42	42	58		
6							54	45	48	
7									57	
8									66	
9										
$t_j^{(1)}$										

У последњу колону матрице уписују се најранији почеци свих активности које полазе из појединих догађаја $t_i^{(0)}$, а израчунавају се на следећи начин :

- Најранији почетак свих активности које полазе из првог догађаја (активности 1-2, 1-3 и 1-4) није условљен претходним активностима, па је њихов најранији почетак 0.

- Најранији почетак активности које почињу у другом догађају (активности 2-5) условљени су завршетком активности које се завршавају у другом догађају (активност 1-2 са трајањем од 30 недеља). То значи да активности које почињу у другом догађају могу започети после тридесете недеље, односно по завршетку активности 1-2.
- Најранији почетак израчунава се тако што се пође од реда који означава догађај за који се израчунава најранији почетак активности које из њега полазе. У пресеку са дијагоналом посматраног реда посматрају се попуњена поља у колони изнад пресека.
- У случају другог догађаја то је само једно поље 1-2, које је попуњено трајањем те активности од 30 недеља.

Вредност у попуњеном пољу сабира се са вредношћу најранијег почетка реда коме то поље припада, и њихов збир даје вредност најранијег почетка у реду (догађају) од којег се пошло. У случају другог догађаја то је:

$$30 + 0 = 30$$

Ова вредност се уписује у последњу колону другог реда и по истом поступку се наставља израчунавање најранијег почетка активности за следеће догађаје.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$t_i^{(0)}$
1		30	32	36						0
2					24					30
3				40	20					32
4					30	36				72
5						42	42	58		102
6							54	45	48	144
7									57	198
8									66	189
9										255
$t_j^{(1)}$	0	78	32	72	102	144	198	189	255	

Најранији почетак активност из четвртог догађаја израчунава се:

$$36 + 0 = 36 \quad (\text{за поље матрице 1-4}) \text{ и}$$

$$40 + 32 = 72 \quad (\text{за поље матрице 3-4}).$$

У овом случају, када у некој колони има више попуњених поља, за свако поље сабира се трајање те активности са најранијим почетком из реда којем поље припада. Већа вредност (у овом случају 72) представља најранији почетак за активности из четвртог догађаја, и она се уписује на крај четвртог реда.

На исти начин израчунавају се вредности најранијих почетака активности и у осталим редовима.

У последњем реду матрице уписују се најкаснији завршеци свих активности које се завршавају у појединим догађајима. Код израчунавања вредности најкаснијих завршетака полази се од последњег догађаја.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$t_i^{(0)}$
1		30	32	36						0
2					24					30
3				40	20					32
4					30	36				72
5						42	42	58		102
6							54	45	48	144
7									57	198
8									66	189
9										255
$t_j^{(1)}$									255	

У последње поље последњег реда преписује се вредност последњег поља последње колоне (најранији почетак активности које би почињале у последњем догађају). Пошто из завршног догађаја не полази ни једна активност, он уједно представља и најкаснији завршетак свих активности које се завршавају у овом догађају.

Најкаснији завршетак активности које се завршавају у осмом догађају израчунава се тако што се посматра осми ред. Код попуњених поља у осмом реду, од најкаснијег завршетка у

последњем реду колоне у којој се налази пуно поље одузима се вредност у том пољу (трајање активности). У овом случају то је: $255 - 66 = 189$. Ова вредност уписује се у последње поље осме колоне.

Овакав поступак наставља се до првог догађаја у којем најкаснији завршетак мора бити једнак нули.

Уколико има више попуњених поља у неком реду, израчунава се разлика за сва поља и уписује се најмања вредност добијене разлике. На пример, у шестом реду су три попуњена поља:

Активност 6 – 7 са дужином трајања 54, активност 6 – 8 са дужином трајања 45 и 6 – 9 са дужином трајања 48.

У овом случају најкаснији завршетак активности које се завршавају у петом догађају је 12, јер:

$$255 - 48 = 207, \text{ односно } 189 - 45 = 144 \text{ и } 198 - 54 = 144$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$t_i^{(0)}$
1		30	32	36						0
2					24					30
3				40	20					32
4					30	36				72
5						42	42	58		102
6							54	45	48	144
7									57	198
8									66	189
9										255
$t_j^{(1)}$	0	78	32	72	102	144	198	189	255	

Након што су израчунати најранији почеци и најкаснији завршеци, подаци о најранијим почецима се преписују испод најкаснијих завршетака и тражи се њихова разлика.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$t_i^{(0)}$
1		30	32	36						0
2					24					30
3				40	20					32
4					30	36				72
5						42	42	58		102
6							54	45	48	144
7									57	198
8									66	189
9										255
$t_j^{(1)}$	0	78	32	72	102	144	198	189	255	
$t_i^{(0)}$	0	30	32	72	102	144	198	189	255	
$t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$	0	48	0	0	0	0	0	0	0	

Догађаји код којих је ова разлика једнака нули су догађаји који се налазе на критичном путу и називају се критични догађаји. У овом примеру критични догађаји су 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9.

У следећем кораку подаци о најранијим почецима и најкаснијим завршецима појединих активности преписују се у листу активности. Критичне активности израчунавају се на основу **укупне временске резерве** која се израчунава као разлика између најкаснијег завршетка, најранијег почетка и трајања активности, односно:

$$R_{ij}^u = t_j^{(1)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Активности код којих је укупна временска резерва једнака нули су критичне активности, односно то су активности које се налазе на критичном путу, или критичним путевима, јер може бити више од једног пута са максималним трајањем.

Ознака		t_{ij}	$t_i^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	R_{ij}^u
i	j				
1	2	30	0	78	48
1	3	32	0	32	0 К
1	4	36	0	72	36
2	5	24	30	102	48
3	4	40	32	72	0 К
3	5	20	32	102	50
4	5	30	72	102	0 К
4	6	36	72	144	36
5	6	42	102	144	0 К
5	7	42	102	198	54
5	8	58	102	189	29
6	7	54	144	198	0 К
6	8	45	144	189	0 К
6	9	48	144	255	63
7	9	57	198	255	0 К
8	9	66	189	255	0 К

Активности код којих је укупна временска резерва једнака нули су критичне активности, односно то су активности које се налазе на критичном путу, или критичним путевима, јер може бити више од једног пута са максималним трајањем.

Из табеле се може видети да су критичне активности (активности код којих је укупна временска резерва нула): 1-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 6-8, 7-9 и 8-9.

Спајањем ових критичних активности добијају се критични путеви. У овом примеру имамо два критична пута које чине следеће критичне активности:

Први критични пут чине критичне активности 1 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 5 - 6, 6 - 7, 7 - 9.

Дужина трајања првог критичног пута је:

$$32 + 40 + 30 + 42 + 54 + 57 = 255 \text{ недеља.}$$

Други критични пут чине критичне активности 1 - 3, 3 - 4, 4 - 5, 5 - 6, 6 - 8, 8 - 9.

Дужина трајања другог критичног пута је:

$$32 + 40 + 30 + 42 + 45 + 66 = 255 \text{ недеља.}$$

То значи да наведени пројекат може бити завршен за 255 недеља. При томе, завршетак пројекта о року у првом реду зависи од благовремене реализације критичних активности.

Активности које се не налазе на критичном путу могу се у одређеној мери пролонгирати, а да то не утиче на укупно време трајања пројекта. Другим речима, активности које се не налазе на критичном путу имају одређене временске резерве.

За анализу времена, односно за израчунавање временских резерви појединих активности које се не налазе на критичном путу, битно је познавати поред **најранијег почетка** ($t_i^{(0)}$) и **најкаснијег завршетка** ($t_j^{(1)}$) који се добијају решавањем триангуларне матрице и **најкаснији почетак** ($t_i^{(1)}$) и **најранији завршетак** ($t_j^{(0)}$) појединих активности.

Најкаснији почетак означава време када најкасније може да започне нека активност, а да не буде угрожено време најкаснијег почетка наредне активности, односно трајање пројекта у целини. Најкаснији почетак се израчунава као разлика између најкаснијег завршетка и трајања активности i-j:

$$t_i^{(1)} = t_j^{(1)} - t_{ij}$$

Најранији завршетак неке активности показује време када нека активност може најраније да буде завршена. Израчунава се као збир најранијег почетка и трајања активности i-j:

$$t_j^{(0)} = t_i^{(0)} + t_{ij}$$

Свака активност (i-j) чије је време трајања краће од њеног максимално дозвољеног времена трајања (разлика између најкаснијег завршетка и најранијег почетка, односно: $t_j^{(1)} - t_i^{(0)}$) има одређену временску резерву.

Временска резерва служи за анализу времена и директно показује за колико времена се може одложити почетак или завршетак појединих активности, а да се не угрози време завршетка пројекта у целини. У зависности од тога у каквом је односу посматрана активност према активностима које јој непосредно претходе, односно које непосредно следе може се идентификовати три врсте временских резерви:

1. Укупна временска резерва (R_{ij}^u)
2. Слободна временска резерва (R_{ij}^s)
3. Независна временска резерва (R_{ij}^n).

Укупна временска резерва је разлика између максимално расположивог времена за извршење неке активности и времена трајања те активности. Она показује за колико је краће време трајања активности које нису на критичном путу, а спајају два критична догађаја.

Слободна временска резерва постоји само када се у завршни догађај стичу две или више активности. Она показује за колико времена је могуће померити рок најранијег почетка активности које нису на критичном путу, а да се тиме не угрозе најранији почеци наредних активности. Слободна временска резерва се израчунава тако што се од највеће вредности најранијег завршетка ($t_j^{(0)}$) свих активности које се завршавају у догађају "j" одузму њихови најранији почеци ($t_i^{(0)}$) и њихово трајање (t_{ij}).

$$R_{ij}^s = t_{j(max)}^{(0)} - t_i^{(0)} - t_{ij}$$

Независна временска резерва показује за колико времена се може продужити трајање активности, рачунајући од њеног најкаснијег почетка, а да се не угрози време најранијег завршетка те активности. Код израчунавања независне временске резерве (R_{ij}^n) узимају се у обзир све активности које полазе из почетног догађаја "i" и све активности које се стичу у завршни догађај "j". Од највеће вредности најранијег завршетка ($t_j^{(0)}$) одузимају се најмања вредност најкаснијег почетка ($t_i^{(1)}$) свих активности које почињу у догађају "i" и трајање посматране активности (t_{ij}).

$$R_{ij}^n = t_{j(max)}^{(0)} - t_{i(min)}^{(1)} - t_{ij}$$

Поред наведених временских резерви које се односе на активности, постоји и условна временска резерва која се односи на догађаје и од значаја је код повезивања више мрежних дијаграма.

Израчунавање укупне, слободне и независне временске резерве дато је у следећој табели:

Ознака		t_{ij}	Почетак		Завршетак		Временске резерве		
i	j		$t_i^{(0)}$	$t_i^{(1)}$	$t_j^{(0)}$	$t_j^{(1)}$	R_{ij}^u	R_{ij}^s	R_{ij}^n
1	2	30	0	48 (0)	30	78	48	0	0
1	3	32	0	0	32	32	0 K	0	0
1	4	36	0	36 (0)	36 (72)	72	36	36	36
2	5	24	30	78	54 (102)	102	48	48	0
3	4	40	32	32	72	72	0 K	0	0
3	5	20	32	82 (32)	52 (102)	102	50	50	50
4	5	30	72	72	102	102	0 K	0	0
4	6	36	72	108 (72)	108 (144)	144	36	36	36
5	6	42	102	102	144	144	0 K	0	0
5	7	42	102	156 (102)	144 (198)	198	54	54	54
5	8	58	102	131 (102)	160 (189)	189	29	29	29
6	7	54	144	144	198	198	0 K	0	0
6	8	45	144	144	189	189	0 K	0	0
6	9	48	144	207	192 (255)	255	63	63	63
7	9	57	198	198	255	255	0 K	0	0
8	9	66	189	189	255	255	0 K	0	0